Devoir surveillé de Mathématiques n°2

Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ sous la forme $x \mapsto \operatorname{argsh}(ax + b)$, en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;5)$, $B(-3;1)$ et $C(5;-1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne des droites (BC), (AC) et (AB).
2. (a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle ABC.
   (b) En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
3. (a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des médiatrices du triangle ABC.
   (b) En déduire les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 3

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \arccos x - \sqrt{2(1-x)} \\ g(x) & = & \arccos x - (2-x)\sqrt{2(1-x)} \end{array}$$

1. Étudier les variations puis le signe des fonctions f et g sur l'intervalle $[0;1]$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4

Dans le plan complexe, on considère les ensembles de points :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_1 & : & |z|^2 & + & 2\,\mathcal{R}e(z) & = & 0 \\ \mathcal{C}_2 & : & |z|^2 & - & 4\,\mathcal{I}m(z) & = & 0 \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des cercles et déterminer leurs centres et leurs rayons respectifs Ω_1, Ω_2, R_1 et R_2.
2. Déterminer les points d'intersection A et B de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
3. (a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_A de centre A transformant Ω_1 en Ω_2 et déterminer son écriture complexe.
   (b) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_B de centre B transformant Ω_1 en Ω_2 et déterminer son écriture complexe.
4. On considère un point $M(z)$ de $\mathcal{C}_1$.
   (a) Calculer $\mathcal{I}m[(z_{s_A(M)} - z_B)\overline{(z - z_B)}]$ et $\mathcal{I}m[(z_{s_B(M)} - z_A)\overline{(z - z_A)}]$.
   (b) En déduire une construction géométrique de $s_A(M)$ et $s_B(M)$.